**Санкт-Петербургский государственный университет**

**Р А Б О Ч А Я П Р О Г Р А М М А**

**УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Случайные процессы

Stochastic Processes

**Язык(и) обучения**

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 2

Регистрационный номер рабочей программы: 001286

**Раздел 1. Характеристики учебных занятий**

**1.1. Цели и задачи учебных занятий**

Обучение учащихся основам теории случайных процессов, используемым в математическом моделировании и анализе сложных стохастических систем.

**1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)**

«Дополнительные главы теории случайных процессов»: знать содержание дисциплины и иметь достаточно полное представление о возможностях применения ее разделов в различных прикладных областях науки и техники; знать основные типы случайных процессов, владеть основами спектральной теории процессов и стохастического интегрирования; владеть многообразием предельных теорем для случайных процессов и уметь применять их к моделям практических систем.

**1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)**

Задачи курса: изучение важнейших примеров, основных понятий и результатов теории случайных процессов, используемых в анализе стохастических систем; развитие навыков самостоятельного решения задач.

**1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий**

Практические занятия и самостоятельная работа.

**Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий**

**2.1. Организация учебных занятий**

**2.1.1 Основной курс**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины,  практики и т.п. | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | | | | | | | | | | Самостоятельная работа | | | | Объём активных и интерактивных  форм учебных занятий | Трудоёмкость |
| лекции | семинары | консультации | практические  занятия | лабораторные работы | контрольные работы | коллоквиумы | текущий контроль | промежуточная  аттестация | итоговая аттестация | под руководством преподавателя | в присутствии  преподавателя | сам. раб. с использованием  методических материалов | текущий контроль (сам.раб.) | промежуточная аттестация (сам.раб.) | итоговая аттестация  (сам.раб.) |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Семестр 7 |  |  |  | 30 |  |  |  |  | 2 |  |  |  | 34 |  | 6 |  | 30 | 2 |
|  |  |  |  | 10-25 |  |  |  |  | 10-25 |  |  |  | 1-1 |  | 1-1 |  |  |  |
| ИТОГО |  |  |  | 30 |  |  |  |  | 2 |  |  |  | 34 |  | 6 |  |  | 2 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п. | Формы текущего контроля успеваемости | | Виды промежуточной аттестации | | Виды итоговой аттестации  (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ) | |
| Формы | Сроки | Виды | Сроки | Виды | Сроки |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | |
| Семестр 7 |  |  | зачёт, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации |  |  |

**2.2. Структура и содержание учебных занятий**

Содержание разделов дисциплины и виды занятий:

1. Основные типы случайных процессов:

Стационарные процессы, процессы со стационарными приращениями, процессы с независимыми приращениями.

2. Гауссовские случайные процессы:

Определение. Математическое ожидание и ковариационная функция как элементы, определяющие конечномерные распределения процесса. Примеры гауссовских случайных процессов. Винеровский процесс и его свойства (независимость и однородность приращений, самоподобие). Броуновский мост и его связь с винеровским процессом. Поле Винера-Ченцова (броуновский лист). Броуновская функция Леви. Дробное броуновское движение. Процесс Орнштейна-Уленбека.

3. Случайные меры и стохастические интегралы:

Определение меры с некоррелированными значениями и интеграла по ней. Простейшие свойства интеграла. Изометрическое свойство интеграла. Комплексные меры. Меры с независимыми значениями. Гауссовский белый шум. Пуассоновские меры. Выражение основных гауссовских процессов (винеровский процесс, броуновский мост, броуновский лист, броуновская функция Леви, дробное броуновское движение, процесс Орнштейна-Уленбека) в виде интегралов по белому шуму.

4. Стационарные процессы и их спектральные представления:

Стационарный процесс в широком смысле. Спектральное представление, спесктральная мера, спектральная плотность. Связь корреляционной функции и спектральной меры. Спектральный критерий дифференцируемости и спектральное представление производной. Закон больших чисел. Спектр процесса Орнштейна-Уленбека. Процесс с двухточечным спектром. Особенности спектрального представления вещественного процесса.

5. Линейные преобразования случайных процессов и последовательностей: :

Усиление, ускорение, задержка, простое и кратное дифференцирование, интегральное преобразование. Переходная и передаточная функция. Композиция интегральных преобразований. Физически реализуемые преобразования. Примеры: идеальный фильтр, интегрирующая цепь, авторегрессионная последовательность и её обобщения.

6. Прогнозирование стационарных последовательностей:

Понятие линейного прогноза. Ошибка прогноза. Регулярные и сингулярные процессы. Примеры таких процессов. Аналитическая интерпретация задачи прогнозирования. Различные пространства функций, связанные с понятиями «прошлого» и «будущего». Достаточные условия построения прогноза. Построение прогноза в случае факторизуемой спектральной плотности. Примеры таких плотностей и прогнозов, в том числе для авторегрессионной последовательности. Вычисление ошибки прогноза. Построение факторизации спектральной плотности при помощи разложения логарифма в ряд Фурье. Определение ошибки прогноза на один шаг в общем случае. Рациональные спектральные плотности. Приведение их к каноническому виду, факторизация и построение прогноза. Примеры решения задач прогноза.

7. Сложные пуассоновские случайные величины и их пределы:

Сложные пуассоновские величины с конечным спектром. Величины общего вида. Метод их построения как суммы случайного числа н.о.р. величин. Выражение математического ожидания, дисперсии, характеристической функции через спектр. Безграничная делимость. Центрирование. Предельные переходы к безгранично делимым величинам общего вида: без центрирования, с центрированием, с частичным центрированием. Условие Леви-Хинчина для спектральных мер. Триплет, характеризующий безгранично делимое распределение.

8. Устойчивые случайные величины и процессы:

Определение, спектральное представление, параметризация семейства устойчивых величин. Строгая устойчивость. Устойчивость нормального закона. Представление Леви-Хинчина устойчивого распределения. Симметричные и односторонние устойчивые законы. Явная формула характеристической функции устойчивого закона.

Хвосты и моментные свойства устойчивых распределений. Устойчивые меры с независимыми значениями и интегралы по ним. Однородные процессы с независимыми приращениями. Определение. Формула для характеристической функции. Представление через интеграл по пуассоновской мере. Устойчивые процессы с независимыми приращениями. Пример: процесс времени выхода винеровского процесса на заданный уровень (устойчивый субординатор). Субординаторы общего вида как процессы времени выхода устойчивых процессов с независимыми приращениями. Устойчивые процессы общего вида.

9. Сходимость процессов:

Сходимость конечномерных распределений. Определения слабой сходимости процессов и их эквивалентность.Связь между слабой сходимостью и сходимостью КМР. Примеры сходимости процессов: принцип инвариантности, сходимость эмпирических процессов, сходимость нормированной траектории инерционной частицы. Плотность семейства распределений. Теорема Прохорова об эквивалентности относительной компактности и плотности. Достаточное условие плотности (аналог теоремы Арцела-Асколи). Теорема о необходимых и достаточных условиях слабой сходимости процессов в C[0,1]. Моментное условие плотности семейства мер в C[0,1]. Принцип инвариантности в C[0,1]. Примеры непрерывных функционалов и предельная теорема для них. Принцип отражения. Предельная теорема для распределения максимума случайного блуждания. Распределение времени первого выхода для винеровского процесса. Разрывные функционалы: момент выхода и время пребывания. Предельная теорема для разрывных функционалов. Предельная теорема для момента выхода. Закон арксинуса.

**Раздел 3. Обеспечение учебных занятий**

**3.1. Методическое обеспечение**

**3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины**

Посещение обучающимися семинарских занятий.

**3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы**

Работа и использование основной и дополнительной литературы.

**3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания**

Зачет проводится в устной форме. Для получения зачета обучающийся должен сделать доклад на семинаре. Преподаватель задает вопросы по теме доклада, а также дополнительные вопросы по другим темам, изложенным в курсе.

Критерии выставления оценок:

«Зачет» ставится за правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя.

**3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)**

Примерный перечень вопросов к зачету по всему курсу:

1. Основные типы случайных процессов.

2. Гауссовские случайные процессы.

3. Случайные меры и стохастические интегралы.

4. Гауссовский белый шум и пуассоновские меры.

5. Стационарные процессы.

6. Спектральное представление, спектральная мера.

7. Закон больших чисел для стационарных процессов.

8. Особенности спектрального представления вещественного процесса.

9. Линейные преобразования случайных процессов и последовательностей.

10. Переходная и передаточная функция.

11. Композиция интегральных преобразований.

12. Идеальный фильтр и интегрирующая цепь,

13. Авторегрессионная последовательность и её обобщения.

14. Понятие линейного прогноза.

15. Аналитическая интерпретация задачи прогнозирования.

16. Достаточные условия построения прогноза.

17. Построение прогноза в случае факторизуемой спектральной плотности.

18. Построение факторизации спектральной плотности при помощи разложения логарифма в ряд Фурье.

19. Определение ошибки прогноза на один шаг в общем случае.

20. Рациональные спектральные плотности. Приведение их к каноническому виду, факторизация и построение прогноза.

21. Сложные пуассоновские случайные величины и их пределы.

22. Определение, спектральное представление, параметризация семейства устойчивых величин.

23. Представление Леви-Хинчина устойчивого распределения.

24. Явная формула характеристической функции устойчивого закона.

25. Устойчивые меры с независимыми значениями и интегралы по ним.

26. Однородные процессы с независимыми приращениями.

27. Устойчивые процессы с независимыми приращениями.

28. Субординаторы.

29. Устойчивые процессы общего вида.

30. Предельная теорема о сходимости к устойчивым распределениям. 31.Устойчивость предела сумм н.о.р. случайных величин.

32. Сходимость конечномерных распределений.

33. Определения слабой сходимости процессов и их эквивалентность.

34. Плотность семейства распределений. Теорема Прохорова.

35. Достаточное условие плотности (аналог теоремы Арцела-Асколи).

36. Теорема о необходимых и достаточных условиях слабой сходимости процессов в C[0,1].

37. Моментное условие плотности семейства мер в C[0,1].

38. Принцип инвариантности в C[0,1].

39. Принцип отражения. Предельная теорема для распределения максимума случайного блуждания.

40. Распределение времени первого выхода для винеровского процесса.

41. Предельная теорема для разрывных функционалов.

42. Закон арксинуса.

**3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса**

Примерная анкета-отзыв по преподаванию дисциплины

Просим Вас заполнить анонимную анкету-отзыв по пройденному Вами курсу. Обобщенные данные анкет будут использованы для совершенствования преподавания. По каждому вопросу проставьте соответствующие оценки по шкале от 1 до 10 баллов (обведите выбранный Вами балл). В случае необходимости впишите свои комментарии.

1. Насколько Вы удовлетворены содержанием дисциплины в целом?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Комментарий\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. Насколько Вы удовлетворены формами преподавания?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Комментарий\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. Как Вы оцениваете качество подготовки предложенных учебно–методических материалов?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Комментарий\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. Насколько Вы удовлетворены использованием преподавателями интерактивных и активных методов обучения?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Комментарий\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. Какие из тем дисциплины Вы считаете наиболее полезными, ценными с точки зрения дальнейшего обучения и/или применения в последующей практической деятельности?
2. Что бы Вы предложили изменить в методическом и содержательном плане для совершенствования преподавания данной дисциплины?

СПАСИБО!

**3.2. Кадровое обеспечение**

**3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий**

К проведению занятий должны привлекаться преподаватели, имеющие ученую степень доктора или кандидата наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности) и/или ученое звание профессора или доцента.

**3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом**

Не требуется.

**3.3. Материально-техническое обеспечение**

**3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий**

Стандартно оборудованные лекционные аудитории, должны вмещать поток в соответствии со списком обучающихся.

**3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования**

Доска для письма мелом или фломастером.

**3.3.3 Характеристики специализированного оборудования**

Не требуется.

**3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения**

Не требуется.

**3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов**

Мел — не менее 1 куска на час лекционных занятий, фломастеры для доски, губка.

**3.4. Информационное обеспечение**

**3.4.1 Список обязательной литературы**

1. П. Биллингсли. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.

2. А.В. Булинский, А.Н. Ширяев. Теория случайных процессов. М. Физматлит, 2003.

3. А.Д. Вентцель. Курс теории случайных процессов. Наука (Физматлит), издания 1975 и 1996.

**3.4.2 Список дополнительной литературы**

1. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные случайные величины. Наука, 1965.

2. Золотарёв В.М. Одномерные устойчивые распределения. Наука, 1983.

3. М.А. Лифшиц. Устойчивые распределения, случайные величины и процессы. СПбГУ, 2007.

4. М.А. Лифшиц. Гауссовские случайные функции. ТВиМС, 1996.

**3.4.3 Перечень иных информационных источников**

Нет.

**Раздел 4. Разработчики программы**

Лифшиц М.А., профессор, докт. физ.-мат. наук

Никитин Я.Ю., профессор, докт. физ.-мат. наук